MA224 – Resolução de Problemas Matemáticos

Trabalho 2

Grupo 3

Questão 1 (proposta pelo professor)

Seja $h(x) = x.\log\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Mostre que a função $f(x) = h(x) + h(1-x)$ pode ser definida como uma função contínua no intervalo $[0,1]$ (para $0 \leq x \leq 1$). Se $logx \equiv \log_b x$, para que valor de b temos $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$?

b) Mostre que $h(tx) + h\big((1-t)x\big) = h(x) + xf(t)$ para quaisquer $x, t \ \in [0,1]$.

c) Mostre que $\sum_{i=1}^{n} h(p_i) \leq \log n$ para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $p_1, p_2, \dots, p_n \in [0,1]$, com $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Qual é a utilidade da função h na Teoria da Informação?

Resolução

a) Lembrando que a composição de funções contínuas é contínua, então temos que $f(x)$ é contínua em $(0,1)$. Assim, para estender f continuamente aos extremos do intervalo $(0,1)$, façamos $f(0) \coloneqq \lim_{x\to 0} f(x)$ e $f(1) \coloneqq \lim_{x\to 1} f(x)$. Seja $f(x) = h(x) + t(x)$, onde $t(x) = h(1-x)$. Temos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) + \lim_{x\to a} t(x)$. Dessa maneira, calculemos os limites desejados quando $x \to 0$ e $x \to 1$. **(0,1)**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 0}(1-x).\log\left(\frac{1}{1-x}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) + (1-0).\log\left(\frac{1}{1-0}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) + 0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right), que\ é\ uma\ indeterminação\ do\ tipo\ \frac{\infty}{\infty}.$$

Como temos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1).x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$$

Apliquemos a Regra de L'Hospital para calcular o limite procurado. Assim:

$$\frac{d}{dx}\left(\log\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right).ln10} \cdot (-x^{-2}) \ \ (pela\ Regra\ da\ Cadeia)$$

$$= -\frac{x}{x^2.ln10} = -\frac{1}{x.ln10}$$

Portanto:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \left(-\frac{\frac{1}{x.ln10}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{x^2}{x.ln10} = \frac{x}{ln10} = \frac{0}{ln10} = 0$$

Agora, calculando o limite quando $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to 1}(1-x).\log\left(\frac{1}{1-x}\right) =$$

$$1.\log\left(\frac{1}{1}\right) + \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}}\right) = 1.0 + \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}}\right), que\ resulta\ em\ uma\ indeterminação\ do\ tipo\ \frac{\infty}{\infty}$$

Como $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = -(1-x)^2.(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} \neq 0$, pelo mesmo raciocínio usado anteriormente, podemos aplicar a regra de L'Hospital. Então:

$$\frac{d}{dx}(\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\cdot ln10\right)}\cdot\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\ (pela\ Regra\ da\ Cadeia)$$

$$= \frac{1-x}{ln10}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x).ln10}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\left(\frac{1}{(1-x).ln10}\right)}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{(1-x).ln10} = \frac{1-x}{ln10} = \frac{1-1}{ln10} = 0$$

Sendo assim, para estendermos a função f continuamente aos extremos do intervalo devemos fazer $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$.

Agora, tomando como b a base de $logx$, temos que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \leftrightarrow \frac{1}{2}\log_b\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\log_b\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\log_b 2 + \frac{1}{2}\log_b 2 = 1 \ \rightarrow \log_b 2 = 1 \ \ \rightarrow$$

$$(pela\ definição\ de\ logaritmo) \rightarrow b^1 = 2 \rightarrow b = 2$$

Portanto, para $b = 2$, temos o desejado.

b) Temos que:

$$h(tx) + h\big((1-t)x\big) = tx\,.\log\left(\frac{1}{tx}\right) + (1-t)x.\log\left(\frac{1}{(1-t)x}\right) =$$

$$= tx(log1 - \log(tx) + (1-t)x.\log(log1 - \log\big((1-t)x\big) =$$

$$= \ -tx.\log(tx) - x(1-t).\log\big((1-t)x\big) =$$

$$= \ -tx.\log(tx) - x.log\big((1-t)x\big) + xt.\log\big((1-t)x\big) =$$

$$= \ -tx.\log(tx) - x(\log(1-t) + logx) + xt(\log(1-t) + logx) =$$

$$= \ -tx(logt + logx) - x.log(1-t) - x.logx + xt.\log(1-t) + xt.logx =$$

$$= \ -tx.logt - \boldsymbol{tx.logx} - x.\log(1-t) - x.logx + xt.\log(1-t) + \boldsymbol{xt.logx} =$$

$$= \ -tx.logt - x.\log(1-t) - \boldsymbol{x.logx} + xt.\log(1-t) =$$

$$= \ -tx.logt - x.\log(1-t) + x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + xt.\log(1-t) =$$

$$= x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + x(-\boldsymbol{t.logt} - \log(1-t) + t.\log(1-t)) =$$

$$= x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(t.\log\left(\frac{1}{t}\right) + \log\left(\frac{1}{1-t}\right) + t.\boldsymbol{\log(1-t)}\right) =$$

$$= x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(t.\log\left(\frac{1}{t}\right) + \log\left(\frac{1}{1-t}\right) - t.\log\left(\frac{1}{1-t}\right)\right) =$$

$$= x.\log\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(t.\log\left(\frac{1}{t}\right) + \log\left(\frac{1}{1-t}\right)(1-t)\right) =$$

$$= h(x) + x\big(h(t) + h(1-t)\big) =$$

$$= h(x) + x.f(t)$$

c) Primeiro, lembremos que uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes derivável no intervalo I, é convexa se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ (*Lima, Elon, Análise Real, vol. 1, pág 111, Corolário 2).*

Provemos então que $g(x) = -logx$ é convexa em [0,1].

Temos que

$$\frac{d}{dx}(-logx) = -\frac{d}{dx}(logx) = -\frac{1}{x.ln10}$$

Derivando novamente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x.ln10}\right) = -\frac{1}{ln10}.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2.ln10}$$

Como $g(x)$ é convexa, então vale a Desigualdade de Jensen, que diz que, para uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, convexa, com $\{x_1, \dots, x_n\} \in I$ e $t_1 + \cdots + t_n = 1$, com $t_i \geq 0$, vale a desigualdade:

$$g(t_1.x_1 + \cdots + t_n.x_n) \leq t_1.g(x_1) + \cdots + t_n.g(x_n)$$

Sendo assim, tomando $x_i = \frac{1}{p_i}$ e $t_i = p_i$ temos que:

$$-log\left(p_1.\frac{1}{p_1} + \cdots + p_n.\frac{1}{p_n}\right) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i.log\left(\frac{1}{pi}\right)$$

$$-\log(n) \leq -\sum_{i=1}^{n} p_i.log\left(\frac{1}{pi}\right) \rightarrow \log(n) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i.log\left(\frac{1}{pi}\right)$$

Mas agora note que o membro da direita da desigualdade é na verdade $\sum_{i=1}^{n} h(p_i)$.
Logo, fica provada a desigualdade desejada.

OBS: Como h foi definida nos pontos $x = 0$ e $x = 1$, não há problemas em considerar os casos $h(0)$ e $h(1)$.

A função $h(x)$ é importante na Teoria da Informação pois ela calcula a Entropia de um certo conjunto de medidas. Por exemplo, se queremos saber o quanto uma frase é significativa em um texto, calculamos a entropia desta frase. Se o resultado é muito alto, podemos inferir que o texto aparece muitas palavras repetidas, então seria necessário retirá-las de modo a diminuir a entropia, para deixá-lo mais limpo e coeso, isto é: uma alta entropia significa pouco teor de informação (redundância), enquanto uma baixa entropia significa alta informação.
Ou seja, a Entropia mede a quantidade de informação de uma certa mensagem.

Questão 2

Após acionar o flash de uma câmera, a bateria imediatamente começa a recarregar o capacitor do flash, que armazena uma carga elétrica dada por:

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

Calcule $Q'(a) = \frac{Q(a+h)-Q(a)}{h}$. Estime $Q'(a)$ para $0 < h \ll 1$.
Sugestão: $e^{-0.1} = 0.9; e^{-0.01} = 0.99; e^{-0.001} = 0.999; e^{-0.0001} = 0.9999$

Solução nível Ensino Médio:

Primeiramente, precisamos calcular $Q(a+h)$ *e* $Q(a)$

$$Q(a+h) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{a+h}{2}}\right)$$

$$Q(a) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right)$$

Calculemos a diferença entre $Q(a+h)$ *e* $Q(a)$

$$Q(a+h) - Q(a) = Q_0\left[\left(1 - e^{-\frac{a+h}{2}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right)\right] =$$

$$= Q_0\left[1 - 1 - e^{-\frac{a}{2}}e^{-\frac{h}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}\right] = Q_0 e^{-\frac{a}{2}}\left(1 - e^{-\frac{h}{2}}\right)$$

$$Q'(a) = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}\left(1 - e^{-\frac{h}{2}}\right)}{h}$$

Para estimar o valor de $Q'(a)$ *usaremos os resultados sugeridos*

Utilizando $h = 0.2$

$$Q'(a) = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}\left(1 - e^{-\frac{0.2}{2}}\right)}{0.2} = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}(1-0.9)}{0.2} = 0.476\ Q_0 e^{-\frac{a}{2}}$$

Utilizando $h = 0.02$

$$Q'(a) = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}\left(1 - e^{-\frac{0.02}{2}}\right)}{0.02} = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}(1-0.99)}{0.02} = 0.498\ Q_0 e^{-\frac{a}{2}}$$

Utilizando $h = 0.002$

$$Q'(a) = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}\left(1 - e^{-\frac{0.002}{2}}\right)}{0.002} = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}(1-0.999)}{0.002} = 0.4998\ Q_0 e^{-\frac{a}{2}}$$

Portanto, para $0 < h \ll 1$

$$Q'(a) = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}}{2}$$

Solução nível Ensino Superior:

Utilizando a definição de derivada da função $Q(t)$ *no ponto* a*, temos:*

$$Q'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{Q(a+h)-Q(a)}{h}$$

Logo

$$Q'(a) = -Q_0\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_{t=a} = \frac{Q_0 e^{-\frac{a}{2}}}{2}$$

Questão 3

(UFSCar-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático:
$h(t) = 1{,}5 + \log_3(t+1)$,
com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, calcule o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o corte.

Resolução:

A altura do tronco da árvore é:
h(t) = 3,5 m

Substituindo e resolvendo a equação temos:

$$3{,}5 = 1{,}5 + \log_3(t+1) \Rightarrow$$
$$3{,}5 - 1{,}5 = \log_3(t+1) \Rightarrow$$

$$2 = \log_3(t+1) \Rightarrow$$
$$\log_3(t+1) = 2$$

$$(pela\ definição\ de\ logaritimo) \Rightarrow$$

$$(\mathrm{t}+1) = 3^2 \Rightarrow$$
$$(\mathrm{t}+1) = 9 \Rightarrow$$
$$\mathrm{t} = 9 - 1 \Rightarrow$$
$$\mathrm{t} = 8$$

Portanto o tempo que árvore evolui até seu corte foi de 8 anos.

Questão 4

As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8(t+1)^6$ e $B(t) = \log_2(4t+4)$, onde a variável t representa o tempo em anos.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

b) Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante t e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

Resolução

a) Se $A(1) = log_8\,(1+1)^6$

$= log_{2^3}2^6$
$= \frac{6}{3} = 2$

$B(1) = log_2(4+4)$
$= log_2 2^2$
$= 3$

$A(7) = log_8(1+7)^6$
$= log_8 8^6$
$= 6$

$B(7) = log_2(4 \cdot 7 + 4)$
$= log_2 2^5$
$= 5$

No instante $t = 1$, A tem 2 mil habitantes e B tem 3 mil habitantes. No instante $t = 7$, A tem 6 mil habitantes e B tem 5 mil habitantes.

b) $A(t) > B(t) \leftrightarrow$
$\log_8(1+\mathrm{t})^6 > log_2(4t+4) \leftrightarrow$
$\frac{6}{3}\log_2(1+\mathrm{t}) > log_2 4 + log_2(t+1) \leftrightarrow$
$\log_2(1+\mathrm{t}) > 2 \leftrightarrow$
$1+\mathrm{t} > 4 \leftrightarrow$
$\mathrm{t} > 3$

Após 3 anos $(t = 3)$ a população de A é sempre maior que a de B.

Questão 5

Um grupo de animais de certa espécie está sendo estudado por veterinários. A cada seis meses, esses animais são submetidos a procedimentos de morfometria e, para tanto, são sedados com certa droga.
A quantidade mínima da droga que deve permanecer na corrente sanguínea de cada um destes animais, para mantê-los sedados, é de 20mg por quilograma de peso corporal. Além disso, a meia-vida da droga usada é de 1 hora- isto é, a cada 60 minutos a quantidade da droga presente na corrente sanguínea de um animal reduz-se pela metade.
Sabe-se que a quantidade $q(t)$ da droga presente na corrente sanguínea de cada animal, t minutos após um dado instante inicial, é dada por:

$$q(t) = q_0 2^{-kt}$$

Em que: I) q_0 é a quantidade de droga presente na corrente sanguínea no instante inicial;
II) k é uma constante característica da droga e da espécie.
Considere que um dos animais em estudo, que pesa 10 quilogramas, recebe uma dose inicial de 300 mg da droga e que, após 30 minutos, deve receber a segunda dose.
Com base nas informações,

a) Calcule a quantidade de droga presente no organismo deste animal imediatamente antes de se aplicar a segunda dose;

b) Calcule a quantidade mínima da droga que esse animal deve receber, como segunda dose, a fim dele permanecer sedado por, pelo menos, 30 minutos,

Resolução:

a) Como a quantidade de droga presente no organismo é dada pela função
$q(t) = q_0 2^{-kt}$,
E sabemos o valor de $q_0 = 300mg$, precisamos apenas do valor de k. Esse pode ser calculado através da meia vida, que sabemos que é de 60 minutos. Sendo assim, temos:

$q(60) = \frac{300}{2} = 300.2^{-60k} \rightarrow \frac{150}{300} = \frac{1}{2} = 2^{-1} = 2^{-60k} \rightarrow k = \frac{1}{60}$

Como queremos a quantidade da droga antes da segunda dosagem, queremos o instante $t = 30$, sendo assim:
$q(30) = 300 \,.\, 2^{\frac{-1}{60}.30} = 300.2^{\frac{-1}{2}} = \frac{300\sqrt{2}}{2} = 150\sqrt{2}mg$

b) Pelo enunciado, sabemos que um animal de 10kg fica sedado se a quantidade da droga presente no seu organismo for maior ou igual a $10 \,.\, 20\ mg = 200mg$.
Para manter o animal sedado por pelo menos 30 minutos, teremos que a quantidade inicial da droga injetada no seu organismo tem que ser tal que:
$q(30) \geq 200 \rightarrow q_0 .\, 2^{\frac{-1}{60}.30} \geq 200 \rightarrow q_0 \geq 200\sqrt{2}mg$
Sendo assim, como sabemos que logo antes da segunda dosagem a quantidade da droga presente no organismo do animal era de $150\sqrt{2}mg$ então a quantidade x a ser adicionada somada com a presente deve ser tal que:
$x + 150\sqrt{2} \geq 200\sqrt{2}mg \rightarrow x \geq 50\sqrt{2}mg$